

Скалярний добуток двох векторів. Властивості та застосування.

Скалярний добуток за означенням: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, де α - кут між векторами.

Властивості скалярного добутку:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, де λ - число.
- 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- 4) скалярний квадрат: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$.

Нехай вектори задано координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

Скалярний добуток через координати векторів знаходиться за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Деякі застосування скалярного добутку

- 1) Косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b} :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Наслідок: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- 2) Проекція вектора \vec{b} на напрям, який задано вектором \vec{a} :

$$np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

- 3) Робота постійної сили: робота сили \vec{F} при переміщенні \vec{s} дорівнює

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha \quad \text{тобто} \quad A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

