

Мішаний добуток векторів. Властивості та застосування.

За означенням мішаного добутку: $\overline{\overline{abc}} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$

Нехай вектори задано координатами: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Мішаний добуток векторів через координати векторів знаходиться за формулою:

$$\overline{\overline{abc}} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку

$$\overline{\overline{abc}} = \overline{\overline{bca}} = \overline{\overline{cab}}$$

$$\overline{\overline{abc}} = -\overline{\overline{acb}}, \overline{\overline{abc}} = -\overline{\overline{bac}}, \overline{\overline{abc}} = -\overline{\overline{cba}}.$$

$$\overline{\overline{abc}} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ - компланарні.}$$

Деякі застосування мішаного добутку

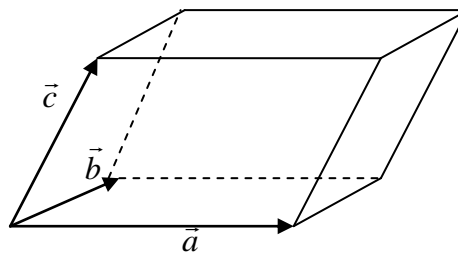
1) Визначення взаємної орієнтації векторів $\overline{a}, \overline{b}$ і \overline{c} :

якщо $\overline{\overline{abc}} > 0$, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - права трійка; якщо $\overline{\overline{abc}} < 0$, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - ліва трійка.

2) Компланарність векторів: $\overline{\overline{abc}} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - компланарні.

3) Знаходження об'єма паралелепіпеда: $V = |\overline{\overline{abc}}|$.



Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і \overline{c} : $V = \frac{1}{6} |\overline{\overline{abc}}|$.